

Poznámky z předmětu PGR III - 4. přednáška

zapsal Čestmír Houška

27. listopadu 2011

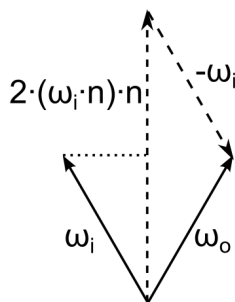
1 Ideální zrcadlový odraz

Ideální zrcadlový odraz nastává ve chvíli, kdy se veškeré příchozí světlo odrazí do směru, definovaného zákonem odrazu. To se děje například na zrcadlech, ale například i na vodě, ačkoliv tam si toho všimneme až když je klidná hladina. I odraz v oční panence je převážně lesklý a byly pokusy toho využít a pomocí fotek očí dělat environment mapping.

Máme-li směr příchozího paprsku $\omega_i = (\theta_i, \phi_i)$, potom směr odraženého paprsku je $\omega_o = (\theta_o = \theta_i, \phi_o = (\phi_i + \pi) \bmod 2\pi)$

Vektorově se odražený směr spočítá přes kosočtverec (jak jsme si ukázali na cvičení). Nejprve provedeme projekci vektoru příchozího paprsku ω_i na normálu k povrchu \mathbf{n} , vynásobíme tuto projekci dvěma (čímž získáme jednu z uhlopříček kosočtverce) a odečteme ω_i :

$$\omega_o = 2(\omega_i \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \omega_i$$



Obrázek 1: Počítání přes kosočtverec

Otázka je, jak výše uvedený fenomenologický popis zrcadlového odrazu namodelovat pomocí BRDF funkce.

1.1 BRDF funkce pro ideální odraz

BRDF funkce, která má výše popsané vlastnosti se namodeluje pomocí Diracovy δ -distribuce. Tato „funkce“ je definovaná tak, že její hodnota je ve všech bodech

nulová a její integrál na \mathbb{R} je roven 1. ¹ BRDF funkci pro zrcadlový odraz si tedy definujeme jako

$$f_r(\theta_i, \phi_i \rightarrow \theta_r, \phi_r) = \frac{\delta(\cos \theta_i - \cos \theta_r)}{\cos \theta_i} \cdot \delta(\phi_i - \phi_r \pm \pi)$$

Spočítáme teď radianci v daném odchozím směru. Při integraci přes příchozí hemisféru se nám díky delta funkcím vynulují všechny hodnoty kromě případu, kdy je v obou δ -funkcích argument 0. Takže integrál je roven $\frac{1}{\cos \theta_i}$ krát hodnota radiance v bodě, kde se delty nevynulují. Po zintegrování se navíc vykrátí $\cos \theta_i$ s kosínem z definice BRDF, takže dostaneme

$$L_r(\omega_r) = \int_{\omega_i \in \Omega} f_r(\omega_i \rightarrow \omega_r) L_i(\omega_i) \cos \theta_i \, d\omega_i = L_i(\theta_r, \phi_r \pm \pi)$$

Takže odchozí radiance v nějakém směru se rovná příchozí radianci z toho samého směru, pouze s azimutem ϕ , lišícím se o π . To je přesně to, co dělá zrcadlo, a tudíž to, co jsme chtěli.

2 Ideální zrcadlový lom

2.1 Snellův zákon

Při ideálním zrcadlovém lomu při přechodu z optického prostředí s indexem lomu η_1 do optického prostředí s indexem lomu η_2 se paprsek láme tak, že platí

$$\eta_1 \sin \theta_2 = \eta_2 \sin \theta_1$$

nebo také

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$$

Slovy „poměr indexů lomu se rovná poměru kosínů úhlů příchozího a lomeného paprsku k normále“.

Vzorec pro výpočet vektoru lomeného paprsku je na slidech z přednášky, dá se odvodit, důležité je zapamatovat si, že při přechodu do opticky hustšího prostředí (tj. s větším indexem lomu) se paprsek láme k normále a při přechodu do opticky řidčího prostředí se láme od normály.

Navíc se při přechodu z hustšího do řidčího prostředí může stát, že by se odchozí paprsek lomil pod úhlem větším než 90° . Potom nastává **úplný odraz** a paprsek se celý normálně odrazí zpět do hustšího prostředí. Kritický úhel θ_{krit} příchozího paprsku, kdy k tomuto úplnému odrazu dojde můžeme odvodit ze Snellova zákona. Tento úhel přitom závisí na indexech lomu obou prostředí:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\sin \theta_{krit}}{\sin(\frac{\pi}{2})}$$

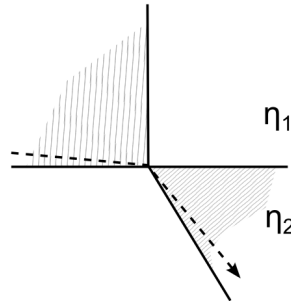
¹Nejedná se o funkci v pravém slova smyslu, protože by takto definovaná funkce musela mít integrál roven nule. Proto uvozovky okolo slova „funkce“ v předchozí větě. Přesto je ale její integrál definován jako 1. δ -distribucí si můžeme představit jako lalok v libovolně malém okolí nuly, jehož plocha je rovna jedné.

↓

$$\theta_{krit} = \sin^{-1} \left(\frac{\eta_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\eta_2} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right)$$

2.2 Změna radiance

U lomeného paprsku se zvýší nebo sníží radiance. To si lze u přechodu do opticky hustšího prostředí vysvětlit tak, že světelný tok, který jde ve směru paprsků pod elevačními úhly 0° až 90° (vlastně z celé hemisféry) a láme se v bodě P, se zhustí do užšího kuželu, kde horní krajní úhel je kritický úhel (úhel totálního odrazu pro dané rozhraní materiálů) - viz ilustrace.



Obrázek 2: „Zhuštění“ energie při lomu světla

3 Fresnelovy rovnice

Fresnelovy rovnice nám říkají, kolik světla se lomí a kolik odráží v závislosti na úhlu pohledu (resp. na elevaci θ tohoto úhlu). Obecně se dá říci, že při pohledu shora se více světla lomí (případně absorbuje) a při pohledu z boku se více světla odráží.

Přesný poměr odraženého světla závisí na typu materiálu, ale i na polarizaci světla. V počítačové grafice se ale většinou polarizace zanedbává. Navíc se často místo Fresnelových vzorců používá Schlickova aproximace.

Na slidech z přednášky jsou dva grafy, které znázorňují odrazivost kovového materiálu a dielektrika. Kovy mají mnohem větší odrazivost při pohledu kolem normály. Navíc je v nich veškeré neodražené světlo absorbováno a přeměněno na tepelnou energii. Naopak na dielektrikách se světlo odráží i lomí dovnitř materiálu.

Fresnelovy vzorce obsahuje i model odrazivosti Cook-Torrance, který popisuje odrazivost kovů, ale i zde se používá aproximace, tentokrát pomocí lineární interpolace $R(0)$ a $R(\frac{\pi}{2})$, což jsou hodnoty odrazivosti, naměřené pod úhly 0° a 90° .

Pozn. – neplést si Fresnelovy vzorce s Fresnelovými čočkami, které se používají v majáčkích ke koncentraci světla.

4 Lesklý odraz

V realitě se nikdy nevyskytuje dokonalý difúzní ani dokonalý zrcadlový odraz. Skutečné materiály jsou vždy někde mezi těmito dvěma ideálními modely. Proto k popisu jejich odrazivosti musíme použít různé níže popsané BRDF modely.

Čím větší je mikroskopická hrubost povrchu, tím více převládá difúzní komponenta odrazu, jak je ilustrováno na slidech z přednášky.

4.1 Retrorefektivita

Některé materiály vykazují tzv. retrorefektivitu, což znamená, že se výrazná část světla odrazí zpět do příchozího směru. Na trojrozměrné reprezentaci BRDF je pak vidět úzký lalok, směřující zpátky do příchozího směru. Příklady „ze života“ jsou měsíc, odrazky, reflexní vesty apod.

5 BRDF modely

BRDF můžeme modelovat třema způsoby - empiricky, fyzikálně korektně a nebo naměřením dat a jejich aproximací. V počítačové grafice se používají hlavně empirické modely, protože jsou většinou jednodušší než fyzikální modely a přitom dostatečně podobné realitě. Jejich nevýhodou je ale, že nemusí splňovat základní požadavky na BRDF, jako například reciprocity, zachování energie apod.

5.1 Fyzikálně korektní Phongův osvětlovací model

Jako příklad si ukážeme fyzikálně nekorektní empirický Phongův osvětlovací model a posléze ho upravíme tak, aby fyzikálně korektní byl. Nejprve si model uvedeme v radiometrickém názvosloví. Jedná se vlastně o rovnici odrazu:

$$L_r(\omega_o) = \int_{\Omega} L_i(\omega_i) \cdot f_r(\omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

Pak si všimneme, že na pravé straně v integrálu bude příchozí radiance jenom jeden Diracův impuls, který odpovídá světlu, přicházejícímu z bodového zdroje (předpokládáme pro jednoduchost jenom jeden zdroj světla), a tedy můžeme rovnici vyjádřit v už zintegrovaném tvaru takto:

$$L_r(\omega_o) = L_i(\omega_i) \cdot f_r(\omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \quad (1)$$

což odpovídá Phongovu osvětlovacímu modelu v radiometrickém tvaru:

$$L_r(\omega_o) = L_i(\omega_i) \cdot (k_d \cos \theta_i + k_s \cos^n \theta_r) \quad (2)$$

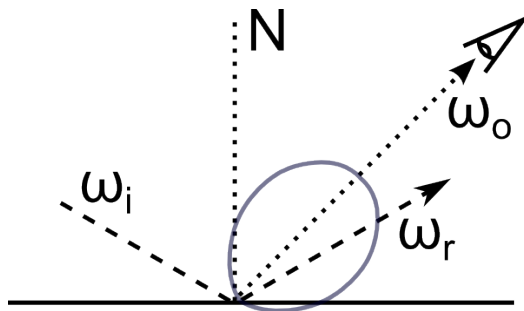
Protože chceme získat Phongovu BRDF, musíme rovnici (2) podělit faktory $L_i(\omega_o)$ a $\cos \theta_i$, jak je vidět z rovnice (1). Tím získáme:

$$f_r^{PhongOrig} = k_d + k_s \frac{\cos^n \theta_r}{\cos \theta_i} \quad (3)$$

Tato rovnice popisuje BRDF, která odpovídá původnímu osvětlovacímu modelu, tak jak jej zavedl Phong. Všimneme si, že tato rovnice nesplňuje základní požadavky na BRDF, např. není symetrická vůči svým parametrům ω_i a ω_o

(pro takto definovanou BRDF také neplatí zachování energie, ale to není při prvním pohledu na rovnici zřejmé). Jednoduchá úprava, která spočívá v odstranění $\frac{1}{\cos \theta_i}$ vede na rovnici jež vyjadřuje BRDF, pro kterou je reciprocita splněna:

$$f_r^{Phong1} = k_d + k_s \cos^n \theta_r \quad (4)$$



Obrázek 3: Lalok lesklé části Phongovy BRDF. $n = 2$

Již víme, že aby BRDF zachovávala energii, musí být její hemisféricko-směrová odrazivost ≤ 1 . Spočítejme tedy hemisféricko směrovou odrazivost BRDF definované rovnicí (4). Přesný postup integrace viz cvičení níže.²

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (k_d + k_s \cdot \cos^n \theta_r) \cos \theta_i d\omega_i = \\ & = \int_{\Omega} k_d \cos \theta_i d\omega_i + \int_{\Omega} k_s \cdot \cos^n \theta_r \cos \theta_i d\omega_i = \\ & = k_d \pi + k_s \frac{2\pi}{n+2} \end{aligned}$$

Difúzní složka má tedy odrazivost $\rho_d = k_d \pi$ a lesklá $\rho_s = k_s \frac{2\pi}{n+2}$.³ Pro zachování energie stačí přidat podmínku, že $\rho_d + \rho_s \leq 1$. Pokud vyjádříme k_d a k_s z výše uvedených vzorečků, získáme

$$k_d = \frac{\rho_d}{\pi}; \quad k_s = \rho_s \frac{n+2}{2\pi}$$

Tato vyjádření už můžeme dosadit do rovnice (4) a získáme tak fyzikálně korektní BRDF:

$$f_r^{PhongCorrect} = \frac{\rho_d}{\pi} + \frac{\rho_s (n+2) \cos^n \theta_r}{2\pi}$$

Tím vznikla fyzikálně korektní, ale stále empirická BRDF funkce, inspirovaná empirickým Phongovým modelem osvětlení. Připomeňme si ale, že jsme

²Zde je důležité poznamenat, že při výpočtech předpokládáme směr pohledu od normály. Pokud se budeme dívat odjinud (což je i situace na obrázku výše), bude část laloku lesklé části BRDF pod tečnou rovinou zobrazovaného objektu, kde by samozřejmě hodnota BRDF měla být nulová. Toto ale budeme pro jednoduchost zanedbávat.

³Pokud bychom chtěli počítat ρ_d a ρ_s z k_d a k_s pomocí těchto vzorečků, je potřeba si uvědomit, že výsledné koeficienty se nemusejí dohromady sčítat na 1.

integrovali při pohledu podél normály. Jinak by totiž část lesklého laloku $\cos^n \theta_r$ byla pod tečnou rovinou zobrazovaného objektu, kde je samozřejmě hodnota BRDF nulová. V takovém případě je odrazivost u lesklé komponenty nižší než ta, kterou jsme spočetli. Proto bude naše normalizovaná BRDF mít pro vysoké hodnoty úhlu θ_o odrazivost menší než by měla mít.

5.2 Fyzikálně motivované BRDF modely

Skutečně fyzikálně založené modely ale vznikají opačným směrem, tzn. máme nejprve nějaký teoretický popis fyzikálních dějů a poté z něho odvodíme BRDF funkci. Často se používají tzv. mikrofacetové modely, kdy je povrch modelován jako množina různě orientovaných plošek. Takto odvozené jsou např. modely Cook-Torrance nebo Torrance-Sparrow.

Distribuce orientace plošek je u jednotlivých modelů různá, ale vždy se ploška považuje za dokonalé zrcadlo a při modelování osvětlení plošek se počítá se třema jevy: zastíněním, maskováním a odrazy. Zastínění je jev, kdy světlo na některé části plošky nedopadne, protože je zastíněna jinou ploškou. Maskování je jev, zamezující světlu se z povrchu odrazit pryč, neboť paprsek dříve narazí do jiné plošky. Co jsou to odrazy snad netřeba vysvětlovat.

5.3 Aproximace naměřených dat

Tento způsob modelování BRDF spočívá v naměření dat a jejich následném napasování na fyzikální model a nebo použití nějaké metody nelineární optimalizace. Nejproblematičtější je asi měření. Používají se různé sestavy, například gonioreflektometr, který je schopen vzorek osvítit a nafotit z libovolného směru, a zjistit tak hodnotu BRDF funkce pro dané parametry.

Problém je v tom, že takovýto měření se musí provést řádově tisíce až desetitisíce, a to dost opotřebovává uzávěrku fotoaparátu, která vydrží jen 50 až 100 tisíc fotek. Navíc je naměření jednoho vzorku dost časově náročné (několik dní) a množství dat, která při tom vzniknou, se pohybuje v řádech až stovek gigabajtů. Takové množství dat se pak samozřejmě obtížně uchovává a reprezentuje.

6 B*DF

Kromě BRDF – obousměrné funkce distribuce odrazu, která popisuje jen odraz světla a je ve všech bodech objektu stejná, existují i různá zobecnění. Můžeme popisovat i průchod světla povrchem materiálu, potom máme BTDF – obousměrnou distribuční funkci lomu. Kombinaci BRDF a BTDF se říká BSDF – obousměrná distribuční funkce rozptylu. Dále se může BRDF měnit s pozicí na povrchu objektu, potom se jmenuje SBRDF, kde „S“ znamená *Spatially varying*, tj. měnící se v prostoru. Ze stejného soudku je i BTF – obousměrná funkce textury. Tato funkce nám spojuje vlastnosti BRDF a textur do jedné funkce. Navíc se textura může měnit i v závislosti na úhlu pohledu, což u běžných textur nemáme.

Někdy chceme, aby nám paprsek, který do objektu vstoupí na jednom místě, vyšel z objektu v místě jiném. Potom použijeme BSSRDF funkci – obousměrnou funkci podpovrchového rozptylu. Pomocí této funkce jsme schopni modelovat

transport světla uvnitř materiálu, a značně vylepšit vzhled spousty (často zdánlivě nepůhledných) materiálů jako je mléko, sýr, kůže, mramor, mýdlo, ...

Cvičení

Odvoďte odrazivost Phongovy BRDF při pohledu podél normály.

Chceme spočítat hemisféricko-směrovou odrazivost následující rovnice, za předpokladu, že se díváme podél normály k povrchu (jinak by bylo počítání mnohem netriviálnější).

$$f_r^{Phong1} = k_d + k_s \cos^n \theta_r$$

Počítejme difúzní a lesklou část zvlášť:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f_r^{Phong1} \cos \theta_i \, d\omega_i & = \\ & = \int_{\Omega} (k_d + k_s \cdot \cos^n \theta_r) \cos \theta_i \, d\omega_i & = \\ & = \int_{\Omega} k_d \cos \theta_i \, d\omega_i + \int_{\Omega} k_s \cdot \cos^n \theta_r \cos \theta_i \, d\omega_i \end{aligned}$$

Nejprve jednodušší difúzní složka. K její integraci potřebujeme znát primitivní funkci k funkci $\cos(x) \sin(x)$. Integrujeme per partes:

$$f'(x) = \cos(x); \quad g(x) = \sin(x)$$

$$\int \cos(x) \sin(x) = \sin^2(x) - \int \sin(x) \cos(x) \Rightarrow \int \cos(x) \sin(x) = \frac{\sin^2(x)}{2}$$

A teď už samotná integrace difúzní složky:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} k_d \cos \theta_i \, d\omega_i & = \\ & = \iint_{\substack{\theta_i \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ \phi_i \in \langle 0, 2\pi \rangle}} k_d \cos \theta_i \sin \theta_i \, d\phi_i \, d\theta_i & = \\ & = 2\pi k_d \int_{\theta_i \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle} \cos \theta_i \sin \theta_i \, d\theta_i & = \\ & = 2\pi k_d \left[\frac{\sin^2(\theta_i)}{2} \right]_0^{\pi/2} = 2\pi k_d \left[\frac{1}{2} - 0 \right] = k_d \pi \end{aligned}$$

Pokračujeme lesklou složkou. K její integraci potřebujeme nalézt primitivní funkci k funkci $\cos^{n+1}(x) \sin(x)$. Opět použijeme metodu per partes:

$$f'(x) = \sin(x); \quad g(x) = \cos^{n+1}(x)$$

$$\begin{aligned} & \int \cos^{n+1}(x) \sin(x) &= \\ &= \cos^{n+1}(x)(-\cos(x)) - \int (n+1) \cos^n(x)(-\sin(x))(-\cos(x)) &= \\ &= -\cos^{n+2}(x) - (n+1) \int \cos^{n+1}(x) \sin(x) &\Rightarrow \\ & \int \cos^{n+1}(x) \sin(x) = -\frac{\cos^{n+2}(x)}{n+2} \end{aligned}$$

Nyní dokončíme integraci lesklé složky. Přičemž si uvědomíme, že díky pohledu podél normály platí $\theta_r = \theta_i$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} k_s \cos^n(\theta_r) \cos(\theta_i) d\omega_i &= \\ &= \int_{\Omega} k_s \cos^{n+1}(\theta_i) d\omega_i &= \\ &= \int_{\substack{\theta_i \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ \phi_i \in \langle 0, 2\pi \rangle}} k_s \cdot \cos^{n+1} \theta_i \sin \theta_i d\phi_i d\theta_i &= \\ &= 2\pi k_s \int_{\theta_i \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle} \cos^{n+1} \theta_i \sin \theta_i d\theta_i &= \\ &= 2\pi k_s \cdot \left[-\frac{\cos^{n+2}(\theta_i)}{n+2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} &= \\ &= 2\pi k_s \cdot \left[-0 - \left(-\frac{1}{n+2} \right) \right] = k_s \frac{2\pi}{n+2} \end{aligned}$$

Takže výsledná odrazivost nenormalizované Phongovy BRDF je

$$k_d \pi + k_s \frac{2\pi}{n+2}$$